MA2 – „písemná" přednáška 6.5.2020

V dnešní „přednášce" upřesníme definici křivky a vyšetříme existenci a vlastnosti křivkových integrálů (skalárních i vektorových) a ukážeme si „návod" na výpočet těchto křivkových integrálů, a samozřejmě i příklady výpočtů křivkových integrálů. Abychom mohli pojem křivkového integrálu upřesnit, musíme nejprve definovat křivku v R^2 (resp. R^3) (zatím jsme pracovali spíše jen s představou křivky) a pak už budeme moci formulovat „přesně" i existenci a vlastnosti křivkových integrálů, a definice „křivky" nám pak také ukáže cestu k výpočtu křivkových integrálů pomocí integrálu Riemannova (Newtonova).

Tedy:

Křivka v $R^3(R^2)$ (volíme zde jednodušší definici, co „nejblíže" naší představě křivky – řada definic je obecnějších):

Definice: Křivka K je množina bodů v $R^3(R^2)$

$$K = \{ X \in R^3(R^2) \ ; \ X = \vec{r}(t),\ t \in \langle a, b \rangle \ (= J) \} \text{, kde}$$

1) $\vec{r}(t)$ $\left(= (x(t), y(t), z(t))\right)$ je spojitá vektorová funkce v J;

2) existuje $\vec{r}\,'(t) \left(= (x'(t), y'(t), z'(t))\right)$ spojitá v J až na konečný počet bodů (tj: $\vec{r}\,'(t)$ je spojitá v $J \setminus M$, kde M je konečná množina) a v bodech nespojitosti existují vlastní jednostranné limity funkce $\vec{r}\,'(t)$;

3) $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ v J až na konečný počet bodů z J (tj. křivka K „má" (až na konečný počet bodů) tečný vektor)

„a názvosloví“:

„Křivka K (z definice) se nazývá křivka po částech hladká.

Zobrazení $\vec{r}: t \in I \to R^3(R^2)$ (z definice) – parametrizace křivky K.

„a speciální (užitečné) druhy křivek $K = \{X \in R^3(R^2);\ X = \vec{r}(t),\ t \in \langle a,b \rangle\}$:

1) K – křivka hladká, když $\vec{r}\,'(t)$ je spojitá v $\langle a,b \rangle$ a $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ v $\langle a,b \rangle$ (tj. v každém bodě má křivka tečný vektor)

2) K – jednoduchý oblouk, když K je hladká křivka a zobrazení $\vec{r}(t)$ (tj. parametrizace) je funkce prostá v $\langle a,b \rangle$ (tj. pro $\forall t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in \langle a,b \rangle$ je $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$, tedy křivka K „nepřetíná“ sama sebe) – krátce se říká jen oblouk.

3) K – jednoduchá uzavřená křivka, když $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, K je hladká křivka a parametrizace $\vec{r}(t)$ je zobrazení prosté v $\langle a, b)$

Příklady křivek (a jejich parametrizací):

1) úsečka v R^3 s krajními body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$:

$\vec{r}(t) = A + t(B - A)$, $t \in \langle 0,1 \rangle$; $(A \neq B)$

$\vec{r}\,'(t) = (B - A)$, $t \in \langle 0,1 \rangle$

„Rozepsáno":
$$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$$
$$y = a_2 + t(b_2 - a_2) \qquad , t \in \langle 0, 1 \rangle$$
$$z = a_3 + t(b_3 - a_3)$$

a „tečný" vektor $\vec{r}'(t) = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

2) kružnice o středu v bodě $O[0,0]$ a poloměru R:

$$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$
$$\vec{r}'(t) = (-R\sin t, R\cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

tj. dle definice – příklad (kladné) jednoduché uzavřené křivky.

3) graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$:

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle$$ (také lze užít označení parametru „přímo" $x \in \langle a, b \rangle$)

a ex.-li $f'(t)$ v $\langle a, b \rangle$, pak

$$\vec{r}'(t) = (1, f'(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle, \quad \text{tj. } \vec{r}'(t) \neq \vec{o}$$

a pro $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \langle a, b)$ atd. $\Rightarrow (t_1, f(t_1)) \neq (t_2, f(t_2))$,

tj. graf funkce, mající derivaci v $\langle a, b \rangle$, je příklad jednoduchého oblouku (v R^2)

4) dodatek k příkladu 2) – (omlouvám se za opomenutí!)

a) parametrizace kružnice o středu $S[s_1, s_2]$ a poloměru R:
$$\vec{r}(t) = (s_1 + R\cos t, s_2 + R\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

b) je-li $t \in \langle 0, 6\pi \rangle$ pro $\vec{r}(t) = (s_1 + R\cos t, s_2 + R\sin t)$, pak kružnici jsme „oběhli" třikrát

c) <u>parametrizace elipsy</u> o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$:

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$ (tečný vektor k elipse v bodě $X = (a\cos t, b\sin t)$)

- opět jednoduchá uzavřená křivka.

5) <u>spirála (šroubovice) v R^3:</u>

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad t \in \langle 0, 6\pi\rangle$$

(„tři závity") $(a>0, b>0)$

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \neq \vec{o} \quad v \ \langle 0, 6\pi\rangle$$

- hladká křivka, <u>oblouk</u>

Pro křivkový integrál vektorové funkce jsme potřebovali cestu – tj. křivku, po které počítáme integrál – práci pole – orientovat – nejčastěji:

<u>Orientace křivky K, daná parametrizací:</u>

je-li $K = \{X \in R^3 (R^2);\ X = \vec{r}(t), t \in \langle a, b\rangle\}$, pak počáteční bod K (p.b.K) je $A = \vec{r}(a)$ a koncový bod K (k.b.K) je $B = \vec{r}(b)$

Říkáme také, že <u>$\vec{K}$ je orientovaná souhlasně s parametrizací</u>

Křivku K, opačně orientovanou, než je $\vec{K}$, budeme značit <u>$\dot{-}\vec{K}$</u>

(tj. p.b. $\vec{K}$ = k.b. $(\dot{-}\vec{K})$ a k.b. $\vec{K}$ = p.b. $(\dot{-}\vec{K})$)

(tečný vektor $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ pak udává „směr pohybu" po $\vec{K}$)

Ještě jedno užitečné značení:
Známe-li křivky $\vec{K}_1$ a $\vec{K}_2$ (tj. orientované křivky) takové, že k.b. $\vec{K}_1$ = p.b. $\vec{K}_2$, pak budeme značit křivku $\vec{K}$, kterou dostaneme "spojením" obou křivek $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ tak, že p.b. $\vec{K}$ = p.b. $\vec{K}_1$ a k.b. $\vec{K}$ = k.b. $\vec{K}_2$ takto:

$$\vec{K} = \vec{K}_1 \dot{+} \vec{K}_2 \qquad (K = K_1 \cup K_2)$$

A nyní už můžeme ukázat, jak vyjádřit křivkový integrál $\int_K f\,ds$ pomocí parametrizace křivky K – nejprve integrál skaláru:
Nechť K je hladká křivka (spec. oblouk, nebo jednoduchá uzavřená)

a $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a,b \rangle$ její parametrizace; pak na K je

$$f(X) = f(\vec{r}(t)), \ t \in \langle a,b \rangle \quad \text{(funkce jedné proměnné)}$$

a potřebujeme vyjádřit ještě „ds" užitím parametrizace –
– zkusme „jednodušše" (Newtonovsky):

v R^2 (a analogicky i v R^3) je $\quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

a je-li $x = x(t)$, $y = y(t)$, pak $\quad ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt =$

$$(\ dx = x'(t)\,dt,\ dy = y'(t)\,dt\ ) \qquad = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

a tedy

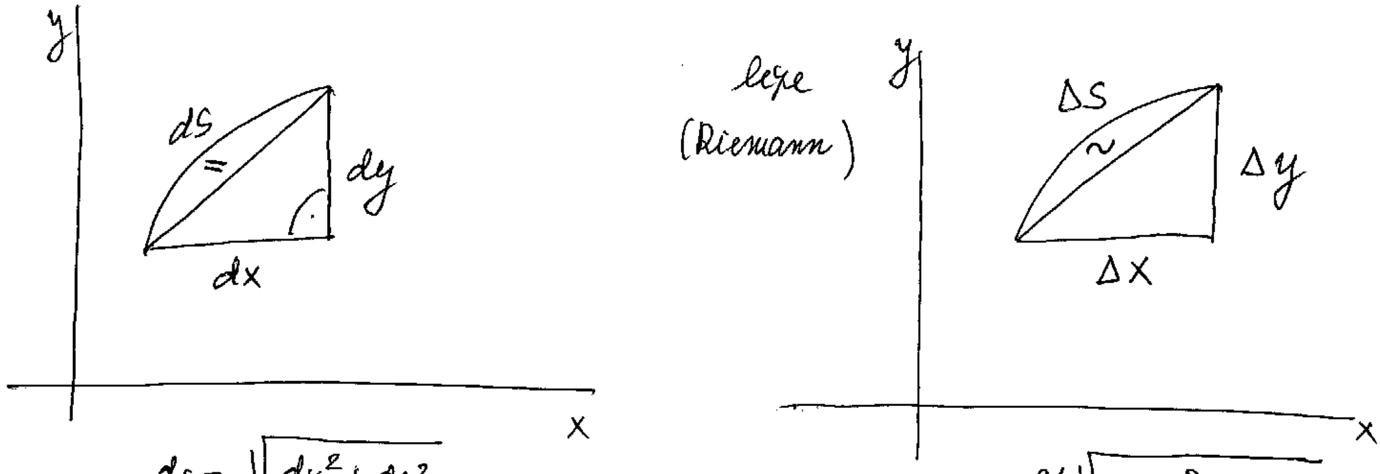
$$\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \qquad (*)$$

Poznámky:

1) Opět se tedy „povedlo" převést výpočet křivkového integrálu na integrál Riemannův pro funkce jedné proměnné – – parametrizace se vlastně jakoby ten drát zakřivený (z minulé přednášky) „narovná" a je z drátu „úsečka" (pro integraci „nejlepší").

2) Vzorec (*) se podobá vzorci pro substituci, jen derivace $\vec{r}\,'(t)$ je zde v „normě"! (snad se vzorec bude dobře pamatovat.

3) Odvození vzorce (*) pro výpočet $\int_K f\,ds$ v příslušném Riemannovském k definici křivkového integrálu je matematicky náročnější, snad nevadí ten jednodušší přístup – ds se zde uvažuje jako nekonečně krátká rovná část křivky (úsečka) a jejíž délka je vlastně dána Pythagorovou větou :- znázorněno.



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \longleftarrow \quad \Delta S \cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

v limitě pro $\nu(D) \to 0$

$$\int_K f\,ds \quad \xleftarrow{a} \quad \sum_i f(\tilde{X}_i)\,\Delta_i S$$

A vraťme se opět k $\displaystyle\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec r(t))\|\vec r\,'(t)\|\,dt$;

kde $X=\vec r(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$ je parametrizace křivky K,
$K\subset\omega\subset R^3(R^2)$ a f je def. v ω:

Pak speciálně: <u>délka křivky K</u> je dána

$$S(K)=\int_K ds = \int_a^b \|\vec r\,'(t)\|\,dt$$

<u>a je-li $\int_a^b \|\vec r\,'(t)\|\,dt \left(=\int_K ds\right)$ konečný, křivka K</u> se nazývá <u>měřitelná křivka</u> (neb křivka konečné délky);

Tedy například jednoduchý oblouk, jednoduchá uzavřená křivka, hladká křivka jsou křivky konečné délky, tj. měřitelné.

To, že se „povedlo" díky parametrizaci křivky K převést výpočet $\int_K f\,ds$ na výpočet (R) $\int_a^b f(\vec r(t))\|\vec r\,'(t)\|\,dt$ nám už umožní vyslovit „pravidla" pro existenci $\int_K f\,ds$, vlastnosti tohoto integrálu, stejně tak i $\displaystyle\int_{\vec K} \vec f\,d\vec r = \int_K \vec f\cdot\vec\tau\,ds$, neboť parametrizací je dán i $\vec\tau$, pokud je $\vec r\,'(t)\neq\vec o$ – dříve, než tak učiníme, je důležité ukázat ještě jednu věc – že $\int_K f\,ds$ je t.zv.
<u>nezávislý na parametrizaci křivky K</u>

Křivku K lze obecně parametrizovat nekonečně mnoha způsoby, když už máme K parametrizovanou

$\int_K f\,ds$ by měl být „dán" jen křivkou K (tj. množinou bodů křivky K v $R^3(R^2)$) a hodnotami fce f, nikoliv tím, jak křivku K „vyjádříme" pomocí parametrizace – brzy si to ukážeme, že při „povolených" změnách parametrizace hodnota $\int_K f\,ds$ se nezmění – (četba je „nepovinná", ale měli bychom si to uvědomit)

<u>Nezávislost křivkového integrálu</u> $\int_K f\,ds$ <u>na parametrizaci K:</u>

a) <u>„přípustné" změny parametrizace:</u>

K – hladká křivka, a $X=\vec{r}_1(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$ je parametrizace K; nechť $t=\varphi(u)$, $u\in\langle\alpha,\beta\rangle$ } pak

$X=\vec{r}_1(\varphi(u))=\vec{r}_2(u)$, $u\in\langle\alpha,\beta\rangle$ – a otázka:

<u>tedy je $\vec{r}_2(u)$ též parametrizací K?</u> Když

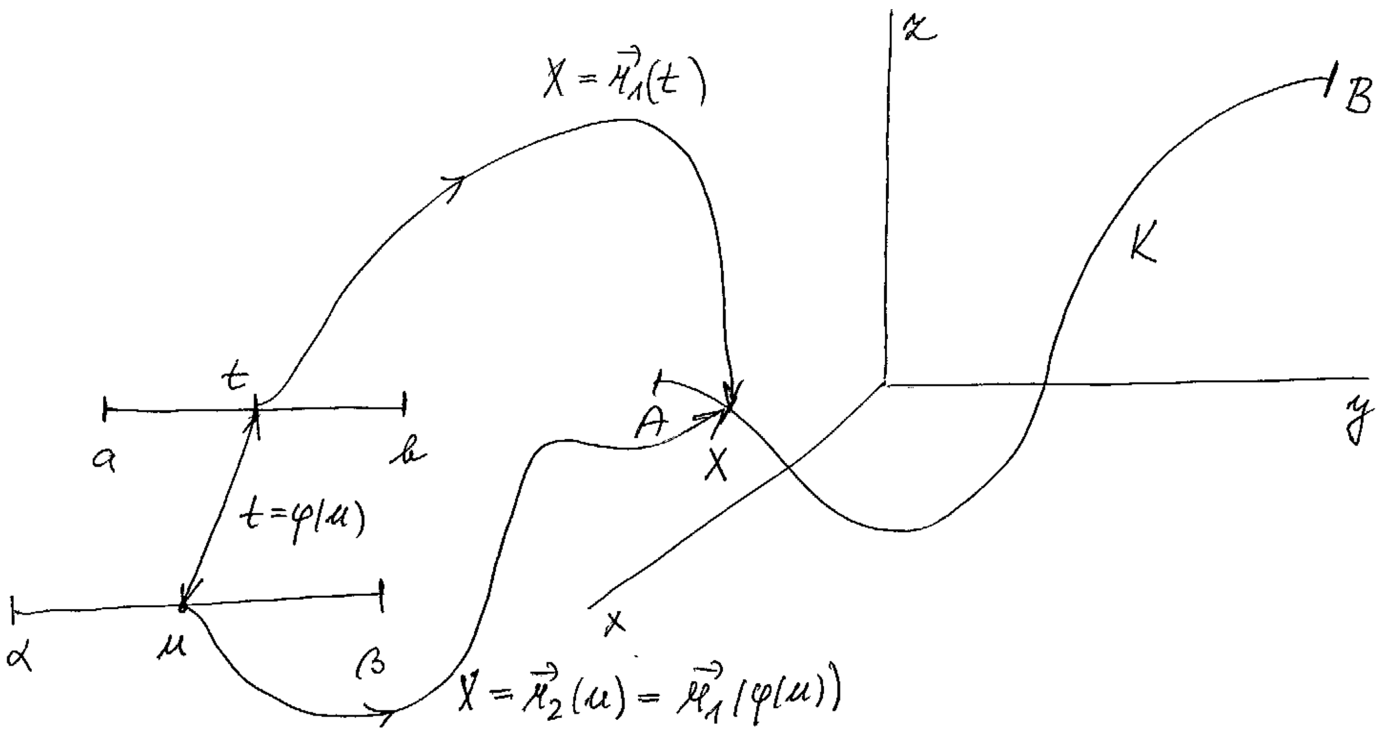
1) $\varphi(u)$ zobrazuje $\langle\alpha,\beta\rangle$ na $\langle a,b\rangle$ $(\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)=\langle a,b\rangle)$
φ je spojitá v $\langle\alpha,\beta\rangle$

2) existuje $\varphi'(u)\neq 0$ v $\langle\alpha,\beta\rangle$, $\varphi'(u)$ je spojitá v $\langle\alpha,\beta\rangle$
(tedy, jak víme, φ' nemění znaménko v $\langle\alpha,\beta\rangle$ a tedy $\varphi(u)$ je ryze monotonní v $\langle\alpha,\beta\rangle$),

pak $\vec{r}_2(u) = \vec{r}_1(\varphi(u))$ je vektorová funkce, spojitá v $\langle \alpha, \beta \rangle$

a $\vec{r}_2{}'(u) = \left(\vec{r}_1(\varphi(u))\right)' = \vec{r}_1{}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \neq \vec{o}$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$
a spojitá v $\langle \alpha, \beta \rangle$,

tedy $\underline{\vec{r}_2(u) \text{ je parametrizací křivky } K}$;



<u>Navíc</u> - jak je to s orientací, která je dána parametrizací u $\vec{K}$:

je-li $\vec{K}$ - orientovaná parametrizací $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$
(p.b. $\vec{K} = \vec{r}(a)$, k.b. $\vec{K} = \vec{r}(b)$),

pak, je-li $\varphi'(u) > 0$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$, je $\vec{K}$ orientovaná shodně parametrizací $\vec{r}_2(u)$ s orientací pomocí $\vec{r}_1(t)$,

je-li $\varphi(u) < 0$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$ je pak $\vec{K}$ parametrizací $\vec{r}_2(u)$ orientovaná opačně, než pro $\vec{r}_1(t)$.

b) nezávislost integrálu $\int_K f\,ds$ na parametrizaci křivky K:

(i) ukažme si nejprve, že délka křivky (tj. výpočet délky K) je na parametrizaci nezávislá:

$l = \int_K ds$ (dle definice) a je-li

$X = \vec{r}_1(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, pak $l = \int_a^b \|\vec{r}_1{}'(t)\|\,dt$, a pro

$X = \vec{r}_2(u) = \vec{r}_1(\varphi(u))$ pak by mělo být též ($u \in \langle \alpha, \beta \rangle$)

$$l = \int_\alpha^\beta \|\vec{r}_2{}'(u)\|\,du = \int_\alpha^\beta \|\vec{r}_1{}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\|\,du = \int_\alpha^\beta \|\vec{r}_1{}'(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)|\,du =$$

předpokládejme (BÚNO) $\varphi'(u) > 0$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(u) = t \\ \varphi'(u)\,du = dt \\ u = \alpha \to t = \varphi(\alpha) = a \\ u = \beta \to t = \varphi(\beta) = b \end{array} \right| \underset{1VS}{=} \int_a^b \|\vec{r}_1{}'(t)\|\,dt \quad \text{(cbd.)}$$

(ii) analogicky se ukáže užitím věty o substituci v určitém integrálu pro přípustné změny parametrizace K, že

$$\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}_1(t))\,\|\vec{r}_1{}'(t)\|\,dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}_2(u))\,\|\vec{r}_2{}'(u)\|\,du$$

(tj. integrál $\int_K f\,ds$ je nezávislý na parametrizaci)

A dále – <u>výpočet křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$</u>
(užitím parametrizace křivky)

Uvažujme hladkou křivku $K \subset R^3 (R^2)$, jejíž parametrizace je dána $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, a nechť $\vec{f}$ je vektorové pole, definované v $\omega \subset R^3 (R^2)$, $K \subset \omega$, K je souhlasně orientovaná s parametrizací. Pak připomínáme, že

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_K \vec{f} \cdot \vec{\tau} \, ds ,$$ kde $\vec{\tau}$ je tečný vektor ke K, $\|\vec{\tau}\| = 1$;

Je-li K hladká křivka, pak $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ v $\langle a, b \rangle$ a tečný vektor $\vec{\tau}(\vec{r}(t)) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$, $t \in \langle a, b \rangle$; pak

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}(t)) \, \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt, \text{ tedy}$$

$$\boxed{\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(t) dt}_{}}$$
(= $d\vec{r}$ ve značení „odpovídá“)

Ve fyzice (a i jinde) se často užívá pro křivkový integrál vektoru zápis, kde $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ a $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$,

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$ („rozepsaný" skalární součin $\vec{f} \cdot d\vec{r}$)

Je dobré si pak všimnout, že je zde i přímo „návod" pro výpočet: je-li $X = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ parametrizace K, $t \in \langle a, b \rangle$, pak $d\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)dt = (x'(t), y'(t), z'(t))dt$ neboť $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$, tedy snadno „je"

$$\int_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b \Big(f_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + f_2(-''-)y'(t) + f_3(-''-)z'(t)\Big) dt$$

(si pamatovat, nebo spíše „přepsat" pomocí parametrizace)

$$\Big(= \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \circ \underbrace{\vec{r}\,'(t)dt}_{d\vec{r}} \quad \text{– a odtud i „symbolika" } d\vec{r} \Big)$$

A opět je i $\int_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r}$ nezávislý na parametrizaci křivky K –

– neboť se „počítá" pomocí křivkového integrálu skaláru.

Ukažme si teď několik příkladů výpočtu křivkového integrálu skaláru (spec. též délky křivky) a křivkového integrálu fce vektorové, a pak probereme ještě podmínky existence a vlastnosti (tj. užitečné a důležité) křivkových integrálů skaláru i vektoru.

Příklady :

1) Výpočet délky křivky, dané parametrizací:

a) délka kružnice o poloměru R ($= 2\pi R$)
K – parametrizace : $X = \vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t),\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\vec{r}\,'(t) = (-R\sin t, R\cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

a tedy $\underline{l} = \int_K ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt =$

$= R \cdot \int_0^{2\pi} dt = \underline{2\pi R}$ (! vyšlo)

b) délka spirály $K : \vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ a>0, b>0,$
$t \in \langle 0, 6\pi \rangle$:

$$\underline{l} = \int_k ds = \int_0^{6\pi} \|\vec{r}\,'(t)\| dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt =$$

$$\left(\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \right) \Bigg| = \sqrt{a^2+b^2} \int_0^{6\pi} dt = \underline{6\pi\sqrt{a^2+b^2}}$$

c) délka křivky, která je částí grafu fce $y = f(x),\ x \in \langle a, b \rangle$,
mající derivace $f'(x) \in R$ v $\langle a, b \rangle$ (tj. oblouk) :

$\vec{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ (nebo lze i $\vec{r}(x) = (x, f(x))$)

$\vec{r}\,'(t) = (1, f'(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$

a $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt$ – „známý" vzorec z aplikací (R) $\int_a^b f(x)dx$

$(= \|\vec{r}\,'(t)\|)$

2) Křivkový integrál skaláru

při výpočtu křivkového integrálu je vlastně jen jediný „nový" problém – a to parametrizace zadané křivky; potom už integrál, který dle „vzorce" pro výpočet křivkového integrálu dostaneme, bychom měli „umět" spočítat (aspoň v „našich" příkladech, obecně – formulovat)

a) $\int_K y\,ds$, kde K je oblouk paraboly $y^2 = x$ mezi body $[1,1]$ a $[4,2]$.

Abychom integrál mohli převést na obyčejný „integrál určitý", potřebujeme parametrizaci K – je jich asi mnoho (nekonečně), tak zkusme nejjednodušší: souřadnice bodu na K x závisí na y, $x = y^2$, tj. je „dobré" dát: $y = t$ (parametr) a pak $x = t^2$, přičemž y je „od 1 do 2", tj. parametrizace K:
$\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $t \in \langle 1, 2\rangle$, nebo, třeba lépe, je to zapsat: $x = t^2, y = t$, $t \in \langle 1, 2\rangle$
a pak $\vec{r}\,'(t) = (2t, 1)$, a $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} =$
$= \sqrt{1 + 4t^2}$

Tedy máme:

$$\int_K y\,ds = \int_1^2 t \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt = \left|\begin{array}{l} 1+4t^2 = u \\ 8t\,dt = du \\ t=1 \rightarrow u=5 \\ t=2 \rightarrow u=17 \end{array}\right| \underset{1VS}{=} \frac{1}{8}\int_5^{17} \sqrt{u}\,du = \dots$$

b) $\int\limits_K z^2 ds$, kde K: $\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{array}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a>0, b>0$ $\left| \begin{array}{l} x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = a\cos t \\ z'(t) = b \end{array}\right.$

(tj. K – jeden „závit" šroubovice)

a tedy $\int\limits_K z^2 ds = \int\limits_0^{2\pi} b^2t^2\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = b^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi} t^2 dt =$

$= b^2 \cdot \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3} b^2\sqrt{a^2+b^2}$

3) Křivkový integrál vektoru

a) $\int\limits_{\dot{-}\vec{K}} \vec{f} d\vec{r} = -\int\limits_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r}$ („užitečné" si uvědomit!)

$\vec{K}$: $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ $(a<b)$, hladká křivka (pro jednoduchost) orientace daná parametrizací

$\dot{-}\vec{K}$: $X = \vec{r}(-t) = \vec{r}_1(t)$, $t \in \langle -b, -a\rangle$, — " —

$\vec{r}_1{}'(t) = \vec{r}\,'(-t) \cdot (-1)$

a pak: $\int\limits_{\dot{-}\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{-b}^{-a} \vec{f}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1{}'(t) dt = -\int\limits_{-b}^{-a} \vec{f}(\vec{r}(-t)) \cdot \vec{r}\,'(-t) dt =$

$\underset{\text{subst.}}{=} \left| \begin{array}{l} -t = u \\ dt = -du \end{array} \right|$ $= -\int\limits_b^a \vec{f}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}\,'(u)(-du) = \int\limits_b^a \vec{f}(\vec{r}(u))\vec{r}\,'(u) du =$

$t = -b \to u = b$
$t = -a \to u = a$

$= -\int\limits_a^b \vec{f}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}\,'(u) du = -\int\limits_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r}$ (cbd)

b) $\int\limits_{\vec{K}} x\,dx + y\,dy + z\,dz \underset{(*)}{=} \int\limits_0^{2\pi} \left(a\cos t(-a\sin t) + a\sin t \cdot a\cos t + bt \cdot b\right)dt$

$= b^2 \int\limits_0^{2\pi} t\,dt = b^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \underline{2\pi^2 b^2}$

(*) tj. $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$ a
kde $\vec{K}$ (spirála) : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $a>0, b>0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$

(orientace je dána parametrizací)

c) $I = \int\limits_{\vec{K}} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$, kde křivka $\vec{K}_i$, $i = 1,2,3$
má: p. b. $K = [0,0]$
k. b. $K = [1,1]$

a 1) $\vec{K}_1$ – úsečka : $x(t) = t$; $x' = 1$, $t \in \langle 0,1 \rangle$
$y(t) = t$; $y' = 1$

2) $\vec{K}_2$ – oblouk paraboly $y^2 = x$, tj. parametrizace (např.)
$x(t) = t^2$, $y(t) = t$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, $x'(t) = 2t$, $y'(t) = 1$

3) $\vec{K}_3$ – oblouk paraboly $y = x^2$, tedy lze parametrizovat
$x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t$

a navíc 4) $\vec{K}_4$ – kružnice $x(t) = R\cos t$, $y(t) = R\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $(R > 0)$, $x'(t) = -R\sin t$, $y'(t) = R\cos t$

a označíme I_j integrál dané funkce $\vec{f}(x,y)$ po K_j ":

$$\underline{I_1} = \int_0^1 \left[(t^2+2t^2)+(t^2+2t^2)\right]dt = \int_0^1 6t^2\,dt = \left[6\cdot\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{2}$$

$$\underline{I_2} = \int_0^1 \left[(t^2+2t^3)2t+(t^4+2t^3)\right]dt = \int_0^1 (4t^3+5t^4)\,dt = \left[t^4+t^5\right]_0^1 = \underline{2}$$

$$\underline{I_3} = \int_0^1 \left[(t^4+2t^3)+(t^2+2t^3)\cdot 2t\right]dt = \int_0^1 (5t^4+4t^3)\,dt = \underline{2}$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \left[(R^2\sin^2 t+2R^2\sin t\cos t)(-R\sin t)+(R^2\cos^2 t+2R^2\sin t\cos t)R\cos t\right]dt =$$

$$= R^3\int_0^{2\pi} (-\sin^3 t-2\sin^2 t\cos t+\cos^3 t+2\sin t\cos^2 t)\,dt = 0$$

(např. $= R^3\int_0^{2\pi} -(1-\cos^2 t)\sin t-2\sin^2 t\cos t+(1-\sin^2 t)\cos t+2\sin t\cos^2 t)\,dt =$

$$= R^3\int_0^{2\pi} (3\cos^2 t\sin t-3\sin^2 t\cos t-\sin t+\cos t)\,dt =$$

$$= R^3\left[-(\cos^3 t+\sin^3 t)+\cos t+\sin t\right]_0^{2\pi} = 0 \quad)$$

To, že $\int_{K_i} \vec{f}\,d\vec{r} = 2$, $i=1,2,3$ a $\int_{K_4} \vec{f}\,d\vec{r} = 0$ není „náhoda", je to příklad vektorového pole, které se nazývá <u>potenciální, nebo konzervativní, nebo též nevírové</u> v R^2, a pro takové pole křivkový integrál „nezávisí" na cestě (tj: křivce, přes kterou integrujeme), a integrál po uzavřené křivce je roven nule – „probereme v příští přednášce".

A nyní (slíbené) vyšetření existence $\int\limits_K f\,ds$ a $\int\limits_{\vec K} \vec f\,d\vec r$, a jejich vlastnosti:

<u>Existence</u> (daná vlastnostmi křivky K i funkcí f, $\vec f$)
(a jí „vidět" ze vzorců pro výpočet integrálů křivkových)

$$\int\limits_K f\,ds = \int\limits_a^b f(\vec r(t))\,\|\dot{\vec r}(t)\|\,dt \quad ; \quad X=\vec r(t),\ t\in\langle a,b\rangle \text{ -}$$

-parametrizace K

1) K nechť je měřitelná křivka
(spec. hladká, oblouk, po částech hladká)

2) pak
a) $\int\limits_K f\,ds$ existuje $\Rightarrow$ f je omezená na křivce K
(podmínka nutná)

b) f je spojitá na K, (K měřitelná) $\Rightarrow$ $\int\limits_K f\,ds$ existuje;

f je spojitá na $K\setminus M$, M konečná,
a f omezená na K (K-měřitelná) $\Rightarrow$ $\int\limits_K f\,ds$ existuje

(podmínky postačující)

A pro $\int\limits_{\vec K} \vec f\cdot d\vec r$ „totéž" pro funkci $\vec f(X)\cdot\vec\tau(X)$ na K
($\vec\tau(X)$ – jednotkový tečný vektor ke K v bodě $X\in K$)
(jako pro f u $\int\limits_K f\,ds$)

Vlastnosti křivkového integrálu

a) integrál skalární funkce : (předpokládáme, že integrály existují)

linearita: $\int_K (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha \int_K f\,ds + \beta \int_K g\,ds$

$\alpha, \beta \in R$ libovolná

uspořádání: $f \leqq g$ na $K \Rightarrow \int_K f\,ds \leqq \int_K g\,ds$

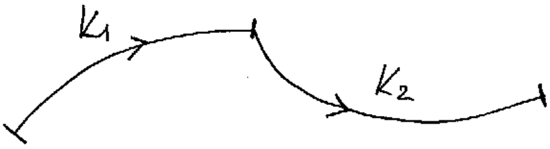
a odtud i věta o střední hodnotě:

je-li f spojitá na K, a $s = \int_K ds$ (délka K), pak existuje bod $\tilde{X} \in K$ tak, že $\frac{1}{s}\int_K f\,ds = f(\tilde{X})$.

aditivita $K = K_1 \cup K_2$, $\int_K f\,ds$ ex. $\Rightarrow$ ex. $\int_{K_i} f\,ds$, $i=1,2$

a když uvažujeme K_1, K_2 takové, že $K_1 \cap K_2$ je jednobodový a (už bylo „dříve")

K:



(a $\vec{K}$ orientujeme tak, že k.b. $\vec{K_1}$ = p.b. $\vec{K_2}$),

pak platí: $$\int_K f\,ds = \int_{K_1} f\,ds + \int_{K_2} f\,ds$$

a pro integrál vektoru:

aditivita: $$\int_{\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{K_1}} \vec{f}\,d\vec{r} + \int_{\vec{K_2}} \vec{f}\,d\vec{r}$$

<u>značí:</u> $\int_{\vec K} \vec f \, d\vec r$ existuje $\Rightarrow$ $\int_{\dot{-}\vec K} \vec f \, d\vec r$ existuje a platí

$$\int_{\dot{-}\vec K} \vec f \, d\vec r = - \int_{\vec K} \vec f \, d\vec r$$

(„spočítali jsme toto – máme tedy i důkaz")

A linearita pro křivkový integrál vektorů, jež existují, opět platí:

$$\int_{\vec K} (\alpha \vec f + \beta \vec g) \, d\vec r = \alpha \int_{\vec K} \vec f \cdot d\vec r + \beta \int_{\vec K} \vec g \cdot d\vec r \, , \quad \alpha, \beta \in R$$

(za předpokladu, že existují $\int_{\vec K} \vec f \cdot d\vec r$ i $\int_{\vec K} \vec g \cdot d\vec r$)

<u>Ukažme na závěr „přednášky" ještě jeden příklad:</u>

Je dáno rovinné vektorové pole v $R^2 \setminus \{[0,0]\}$:

$$\vec f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

a spočítejme křivkový integrál tohoto pole po kladně orientované kružnici o středu v počátku a poloměru $R>0$, tj. po křivce K, jejíž parametrizace je

$$\vec K_R : \; X = \vec r(t) = (R\cos t, R\sin t) \, , \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

a orientace je dána parametrizací:

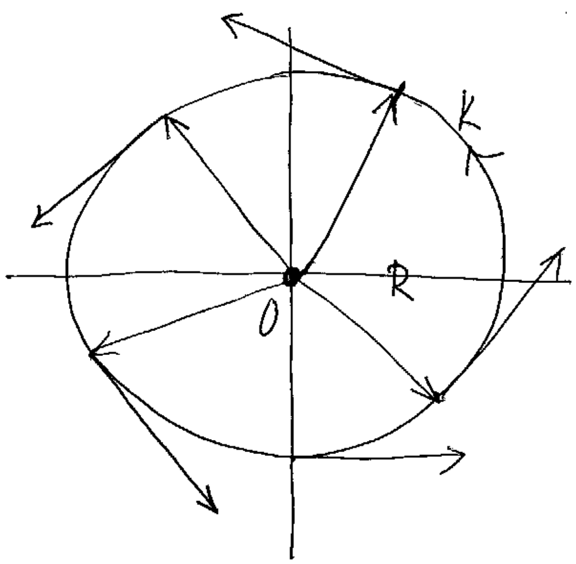
$$\vec r\,'(t) = (-R\sin t, R\cos t) \, , \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\int_{\overrightarrow{K_R}} \vec{f}\,d\vec{r} = \int_{\overrightarrow{K_R}} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\sin t}{R^2} \cdot (-R\sin t) + \frac{R\cos t}{R^2} \cdot R\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = \underline{2\pi}$$

Práce pole $\vec{f}$ v našem příkladu nezávisí na poloměru kružnice (se vzdáleností bodu $X[x,y]$ od počátku se velikost vektoru $\vec{f}$ zmenšuje – tak „šikovně") – toto je příklad užitečný pro pozdější přednášku, a zkusme si ještě toto pole $\vec{f}$ „představit" graficky: vektor $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ je kolmý k vektoru (x,y) v bodě (x,y) kružnice, tedy je tečný ke kružnici v bodě (x,y):



a na kružnici o poloměru $R>0$ má velikost

$$\|\vec{f}(x,y)\| = \sqrt{\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{R}$$

– pole $\vec{f}$ představuje „vír" kolem počátku (možná představa)